

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real- științe ale naturii, servicii , tehnologic
Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a - barem de corectare

1.a)	Asociativitate și comutativitate Se determină elementul neutru $e = 3 \in (2, +\infty)$. Orice element $x \in (2, \infty)$ are simetricul $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in (2, \infty)$.	1p 1p
1.b)	$\forall x, y \in (0, \infty) \Rightarrow f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$: $f(x \cdot y) = axy + b$ și $f(x) \circ f(y) = a^2xy + (ab - 2a)x + (ab - 2a)y - 4b + 6$ Din $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$ se obține $a = 1, b = 2$ Bijectivitatea funcției $f : (0, \infty) \rightarrow G, f(x) = x + 2$.	1p 1p 1p
1.c)	Se arată că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2, x, y \in G$ Obține $x \circ x = (x-2)^2 + 2$ și inducție matematică pentru: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2, n \geq 1$. Se obține $(x-2)^{2017} + 2 = 3^{2017} + 2 \Rightarrow x = 5$.	1p 1p
2.a)	Se arată că $\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) = A(2ab + a + b) \in G$.	2p
2.b)	Din a) avem $A(a) \cdot A(b) = A(2ab + a + b) = A\left(2\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$ Se demonstrează că $A(a)^n = A\left(2\left(a + \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\right)$ Se obține că $\begin{pmatrix} 11 & 30 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}^{2017} = A(2)^{2017} = A\left(2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2017} - \frac{1}{2}\right)$.	2p 2p 1p
3.a)	Avem $\int (f_0(x) - f_1(x))dx = \int \frac{1-x}{e^x} dx = \frac{x}{e^x} + C$.	3p
3.b)	Fie F o primitivă a funcției f_{2017} . Atunci $F''(x) = f_{2017}'(x) = \frac{x^{2016}(2017-x)}{e^x} > 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ Deci F este convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$.	3p 1p
4.a)	Se alege $u(x) = \arccos(2x)$ și se obține $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{13\pi^3}{648}$.	1p 2p
4.b)	Argumentează că $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x^{2k}} \leq 1, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ Integrând rezultă inegalitatea.	2p 2p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.